

Chapitre V

FLEXION

I Généralités

1) Présentation du problème

Une **poutre horizontale** suspendue en ses extrémités par deux câbles verticaux ou placée sur deux appuis fixes, subit une **flexion** qui se traduit par un **changement de courbure**.

2) Hypothèses

a - Le solide étudié

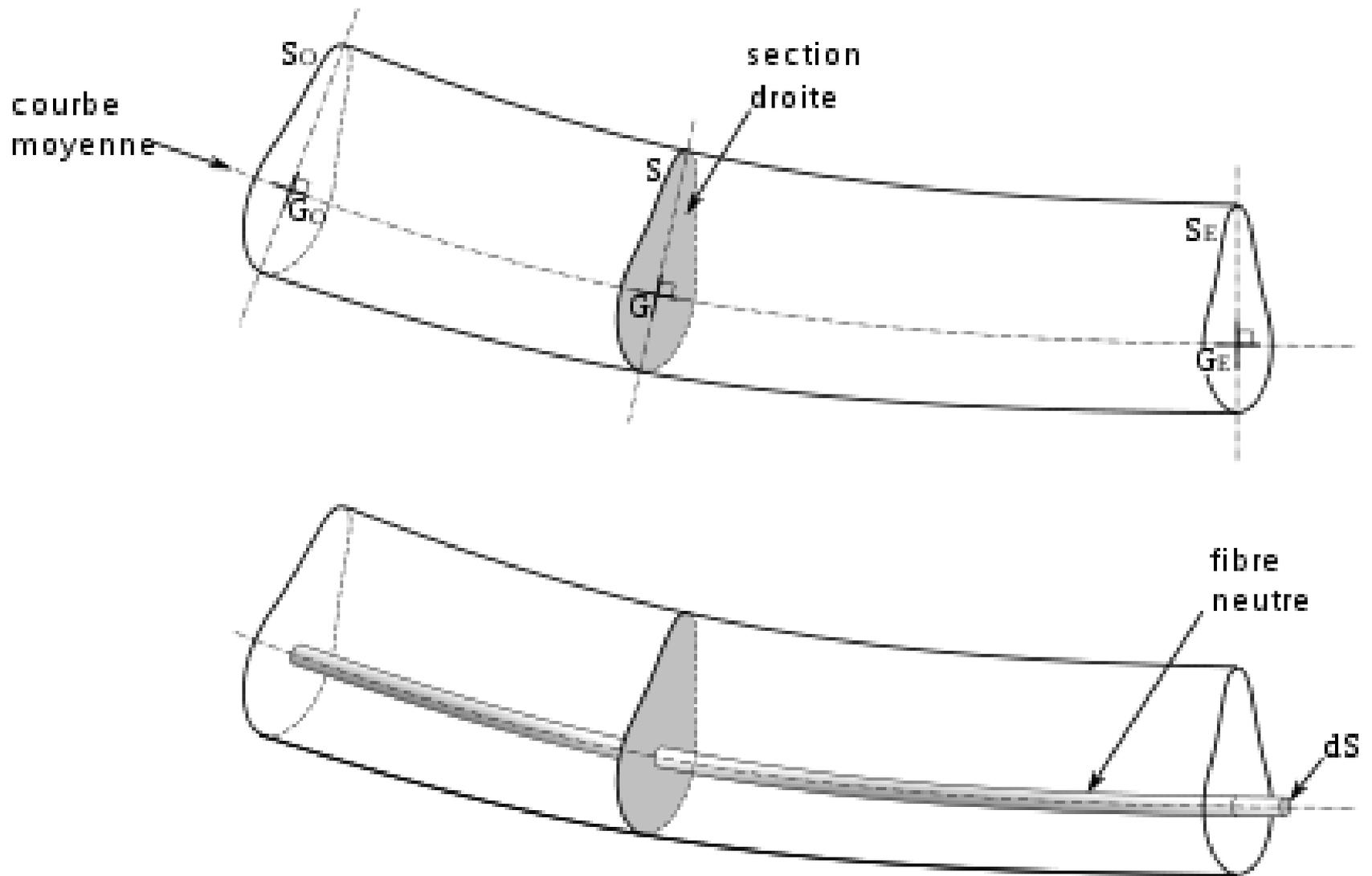
La poutre possède un **plan de symétrie vertical**.

b - Les forces appliquées

Toutes les **forces** sont **verticales** et leurs lignes d'action sont dans le plan vertical de symétrie de la poutre.

c - Théorie des poutres

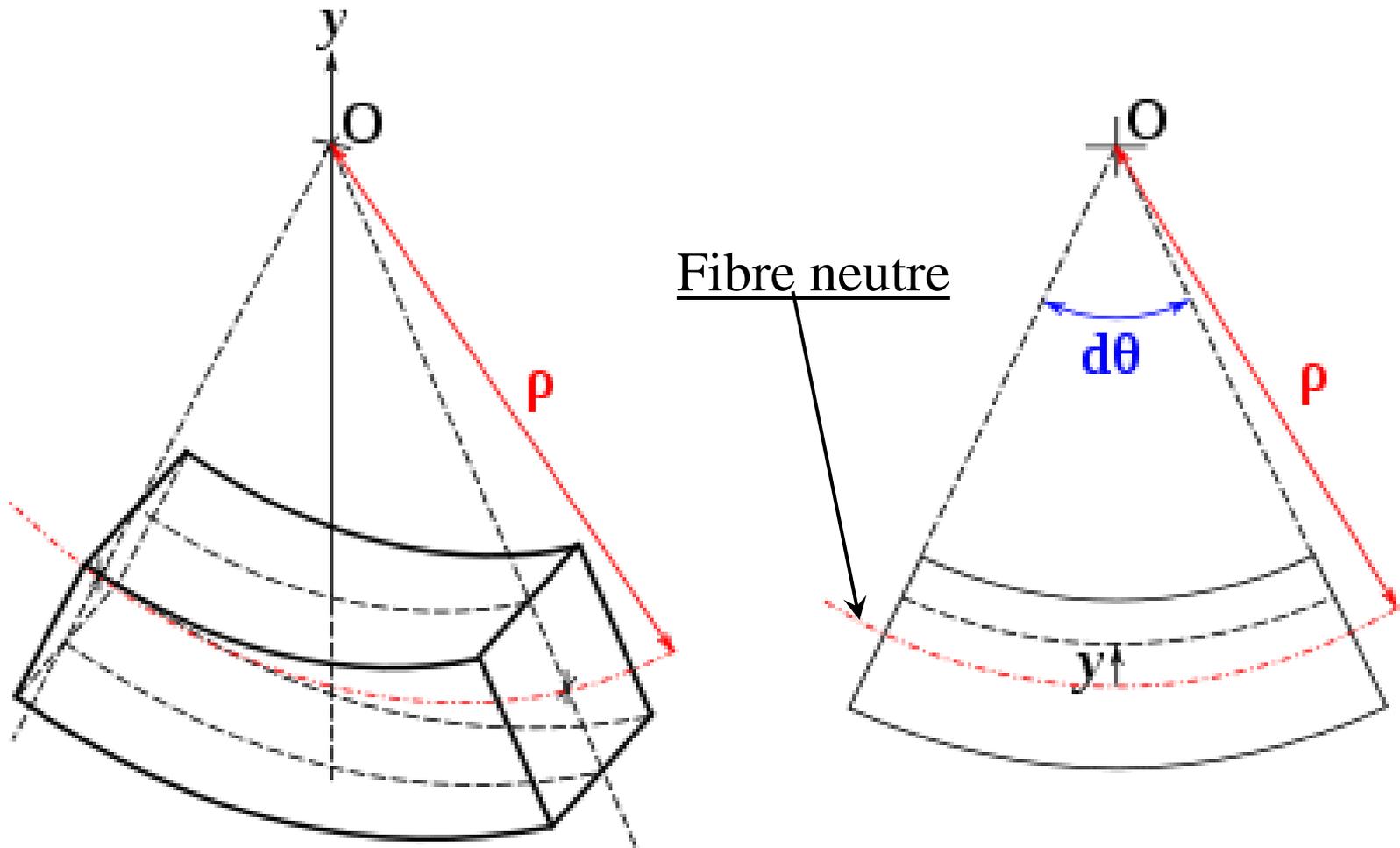
En théorie des poutres, on considère des **fibres**, c'est-à-dire des petits cylindres de matières générés par une portion dS et une courbe parallèle à la courbe moyenne (la « direction de la poutre ») ; **la courbe moyenne** passe par **les centres de gravité des sections droites** (sections perpendiculaires à la courbe moyenne).



Poutre quelconque

d - Navier et Bernoulli

- ❖ Lors de la déformation, les **sections droites** restent **perpendiculaires** à la **courbe moyenne**.
- ❖ La fibre neutre a un allongement **nul** ;
- ❖ Les fibres à l'extérieur de la courbure sont **étirées**.
- ❖ Les fibres à l'intérieur de la courbure sont **comprimées**.
- ❖ La déformation longitudinale ε varie de manière **linéaire** en fonction de y .



Élément d'une poutre fléchie : **les fibres forment des arcs de cercle concentriques**, les fibres du haut sont donc comprimées et les fibres du bas étirées.

II Définitions

1) Poutre

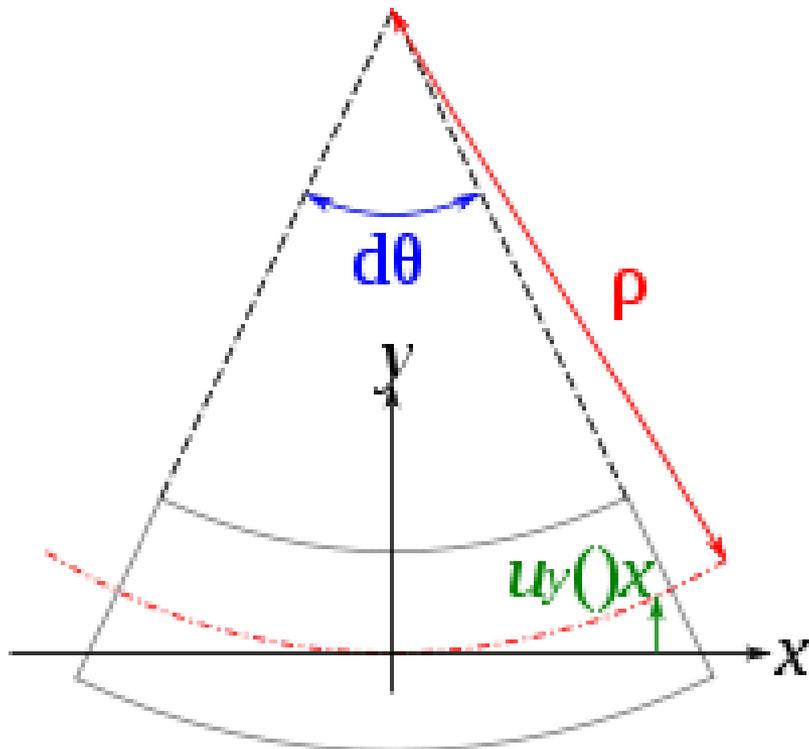
Grosse pièce de charpente horizontale en bois, en béton ou en métal soutenant une construction.

2) Fibre neutre

La fibre générée par la courbe moyenne est appelée « fibre neutre ». Elle garde sa longueur lors de la flexion.

3) Flèche

La flèche est le **déplacement vertical** $u_y(x)$ du point de la courbe moyenne situé à l'abscisse x .



Le déplacement $u_y(x)$ donne la forme finale de la fibre neutre, et est relié au **rayon de courbure** local ρ .

4) Déformé de la poutre

La déformée de la poutre est le **graphique** de la fonction $u_y(x)$ qui donne la **forme de la courbe moyenne**.

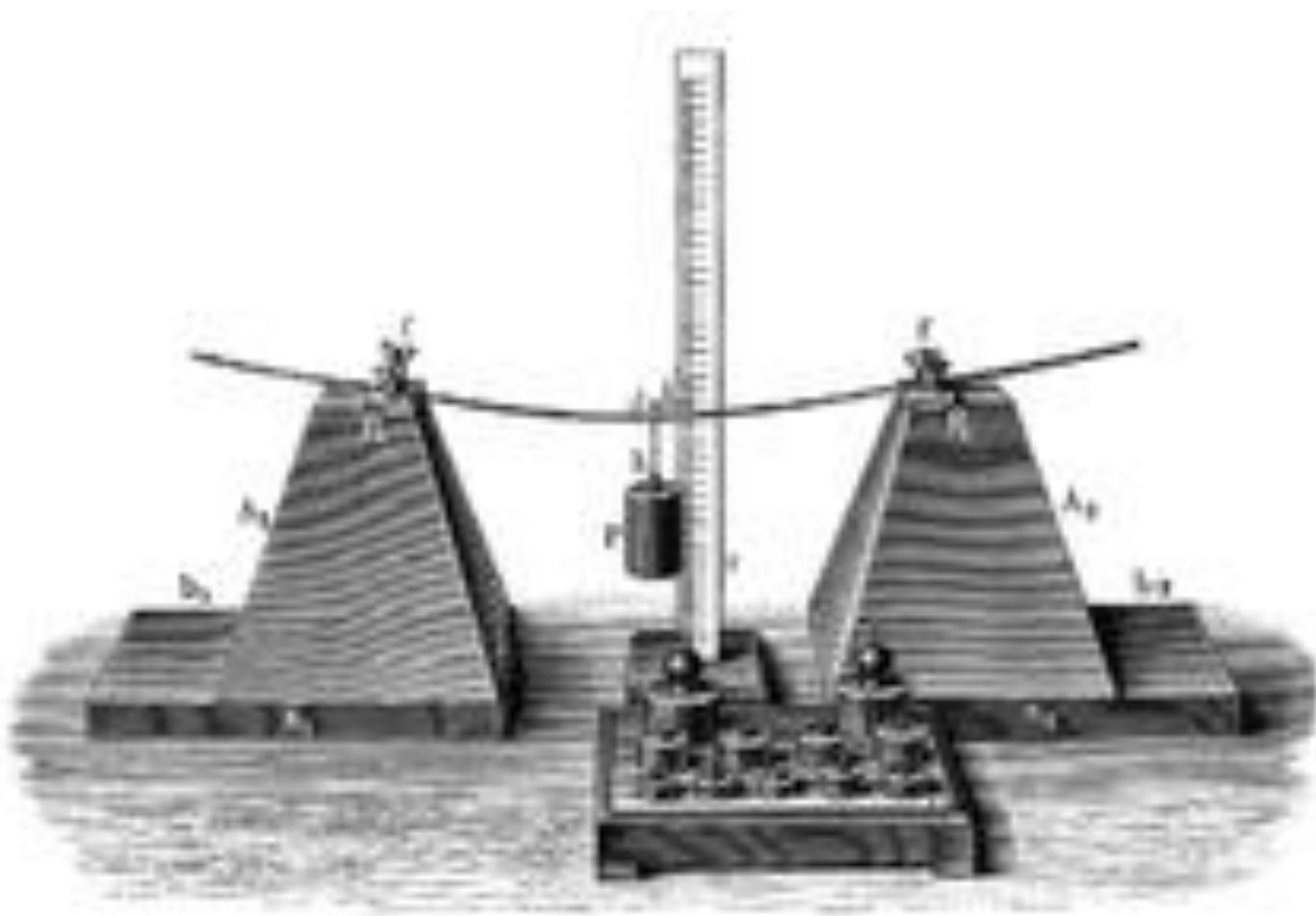
5) Rayon de courbure

C'est le **rayon du cercle** formé par la **courbe moyenne**.

Pour les faibles déformations :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 u_y}{dx^2}$$

III Etude expérimentale des déformations



Dispositif de mesure de la flèche



Test de **flexion trois-points** sur un échantillon de **béton**.

1) Variation de la flèche

a - Intensité de la charge

Pour une charge appliquée au même point, on constate que la **flèche** est d'autant plus **importante** que la **charge** est plus **grande**.

b - Position de la charge

La **flèche** est d'autant plus **importante** que la **charge** est appliquée **loin des appuis**.

c - Dimension de la section

Une poutre **fléchit** d'autant **plus** que sa **section** se trouve située dans sa **position de moindre inertie**.

2) Déformations longitudinales

L'expérience fait apparaître :

- un plan de fibres neutre qui conservent une longueur constante;**
- les fibres situées au-dessus du plan neutre sont comprimées;**
- les fibres situées au-dessous du plan neutre sont tendues.**

3) Déformations transversales locales

Dans certaines zones de la poutre (surtout au voisinage des appuis), on voit apparaître un phénomène de **glissement transversal**. Ces déformations sont négligeables devant les déformations longitudinales.

4) Conclusions

La **flexion** est une **sollicitation complexe** pour laquelle nous retrouvons des notions telles que :

- ➔ la traction;
- ➔ la compression;
- ➔ le glissement longitudinal;
- ➔ le glissement transversal.

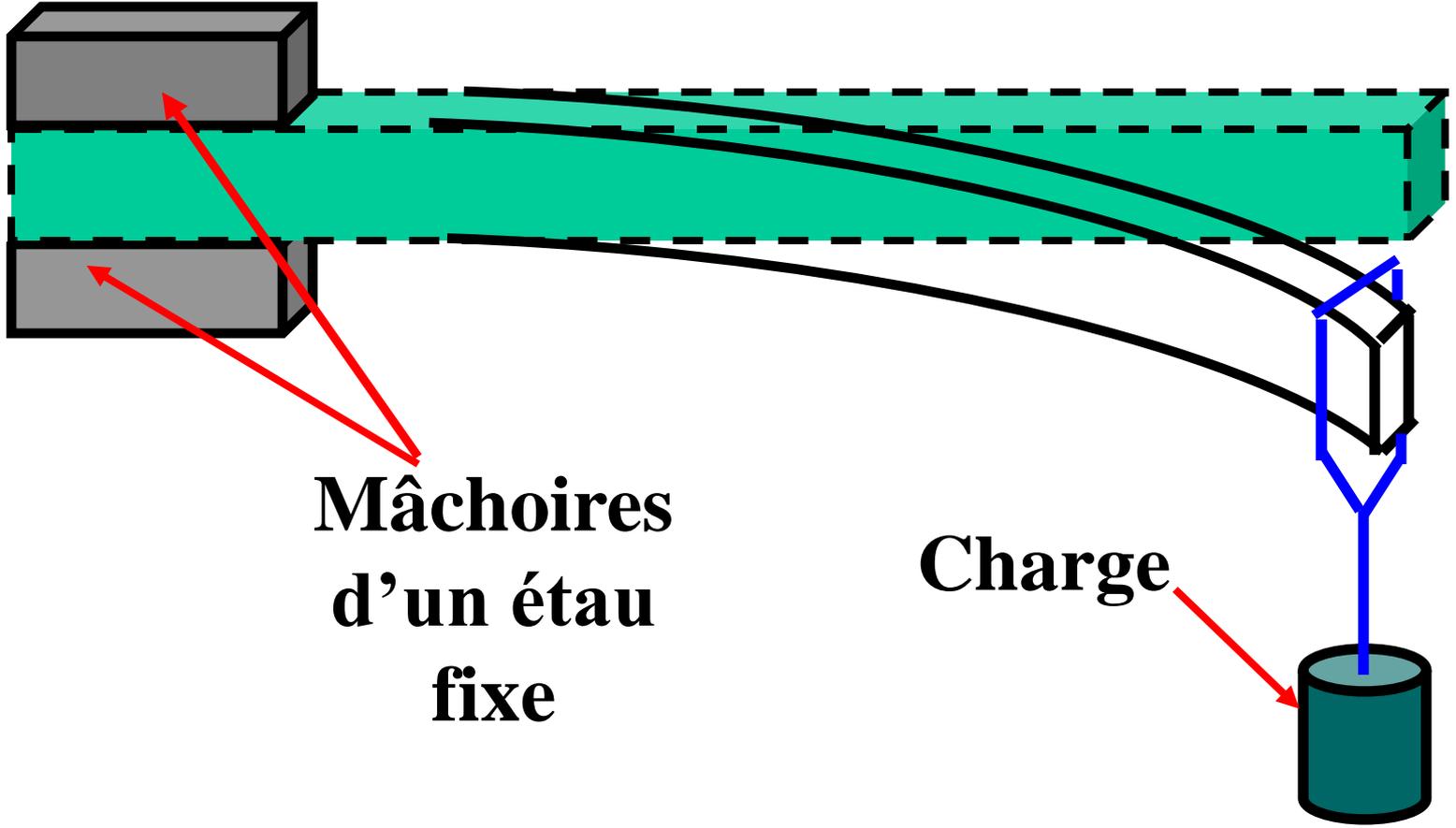
5) Remarque

Les résultats expérimentaux obtenus ont été énoncés sous forme d'**hypothèses** par les physiciens **Navier** et **Bernoulli**.

IV Contraintes et déformations

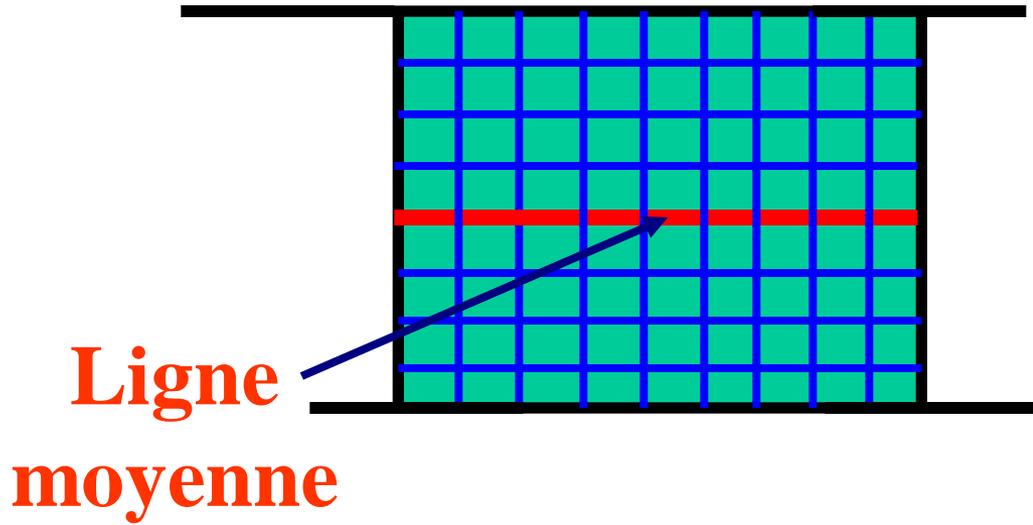
1) Illustration

Pour illustrer ce type de déformation, on considère l'expérience schématisée par la figure ci-après.



**Mâchoires
d'un étau
fixe**

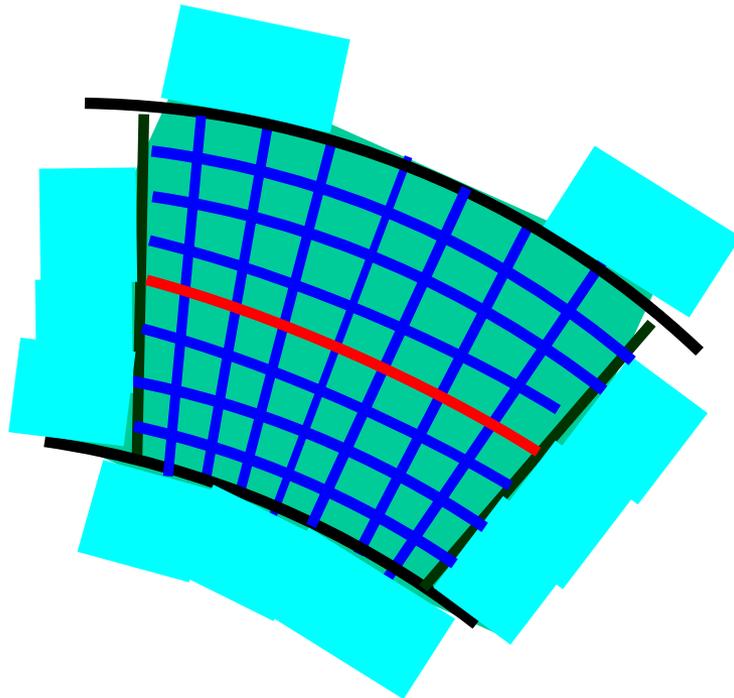
Charge



Etat non déformé

de la surface

latérale



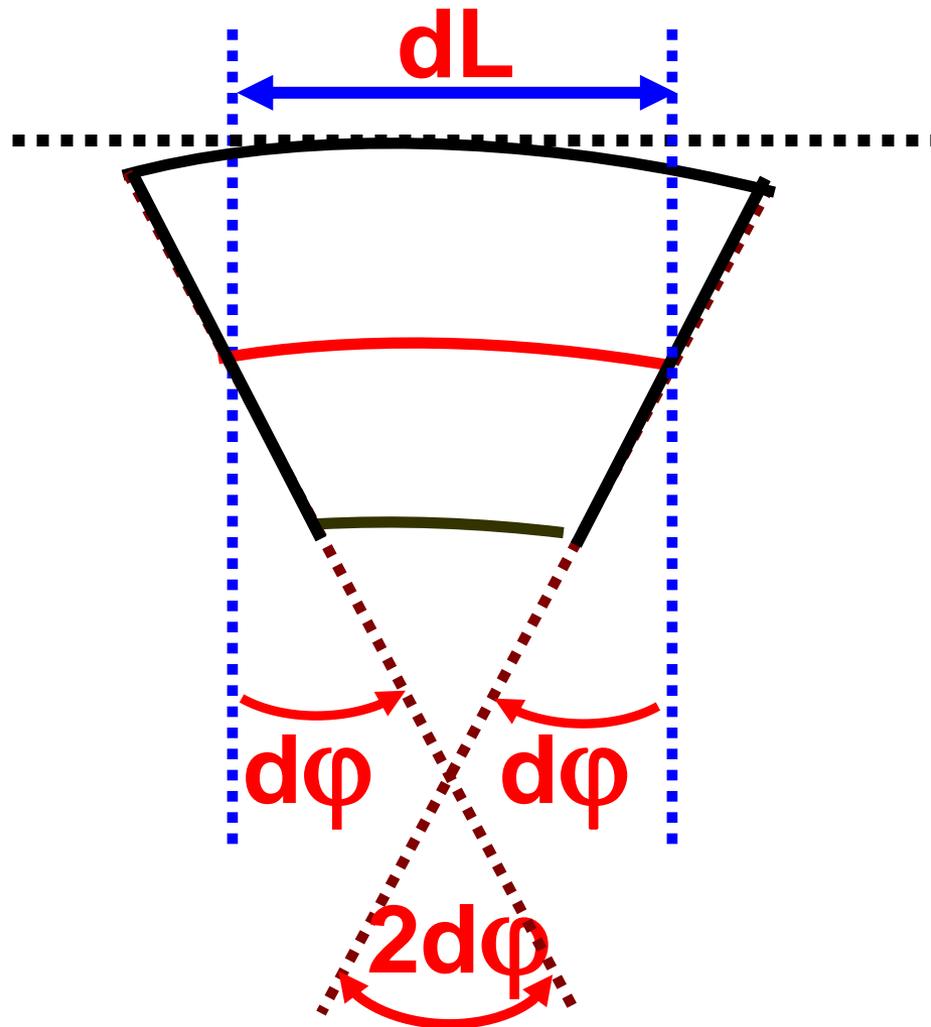
Etat déformé

de la surface

latérale

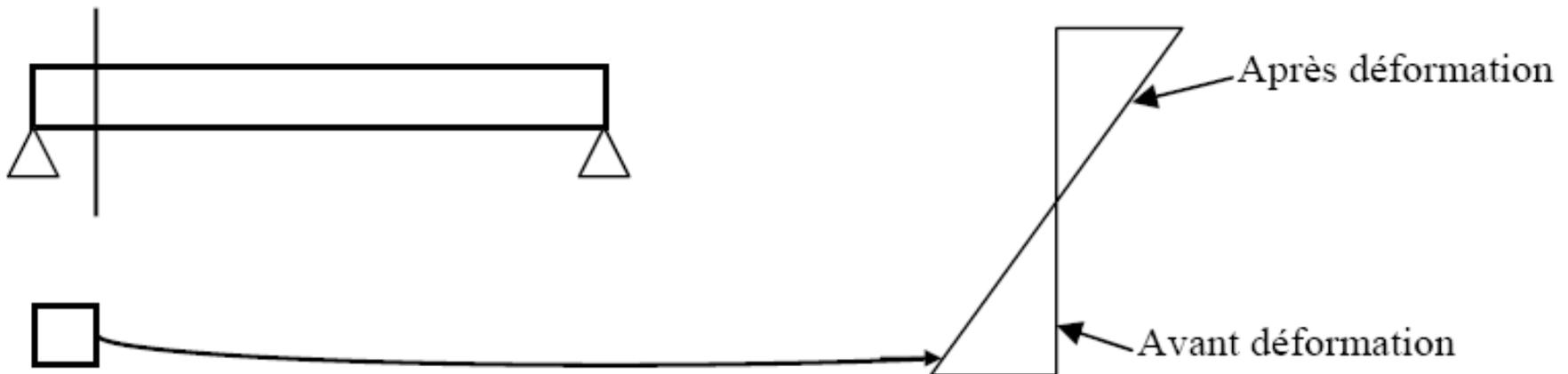
Après déformation, les couches supérieures s'allongent tandis que celles du bas se resserrent. La couche moyenne conserve pratiquement sa longueur.

Découpons, par imagination, dans la barre, un tronçon de longueur suffisamment petite dL .



Le **segment infinitésimal** sur la ligne moyenne conserve sa longueur **dL** .

La section transversale reste **plane**. Par conséquent le **raccourcissement** et l'**allongement** des couches sont **proportionnelles** à la **distance transversale** de ces couches mesurée à partir de la ligne moyenne.



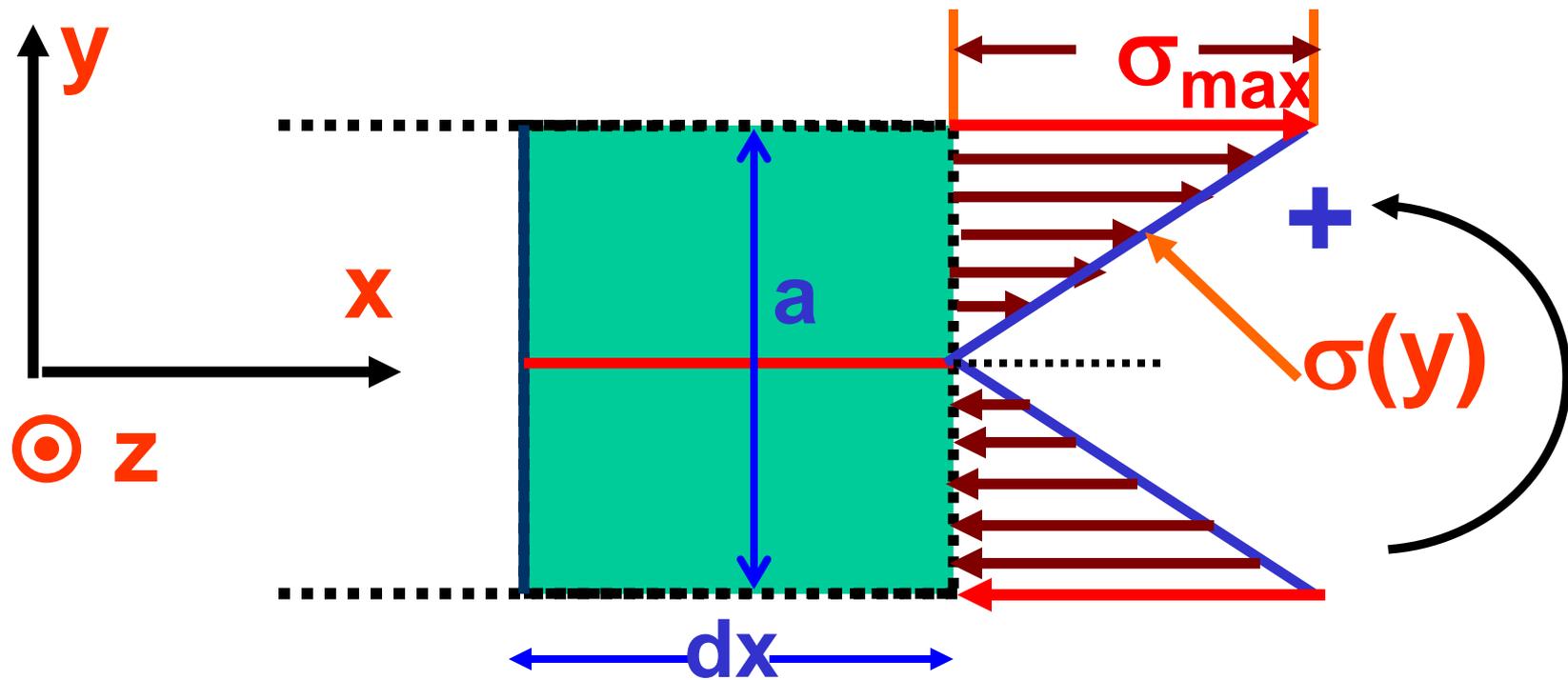
La **contrainte normale** dans chaque couche est **proportionnelle** à son **allongement** ou à son **raccourcis-ement**.

$$\varepsilon = m|y|$$

m coefficient de proportionnalité.

|y| distance par rapport à la fibre neutre.

$$\sigma = E \varepsilon = E m |y|$$



$$\sigma = \sigma_{\max} \frac{2y}{a}$$

σ_{\max} est la **contrainte normale** au niveau de la couche la plus éloignée de la ligne moyenne.

Remarque: l'effort normal exercé sur la section transversale droite du tronçon élémentaire est nul.


$$F = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} dz \sigma_{\max} \frac{2y}{a} dy = 0$$

b désigne la largeur de la section transversale.

V Moment de flexion

1) Calcul du moment

Calculons le **moment de flexion** exercé sur la section transversale.



$$M_f = - \int_{-a/2}^{a/2} y \, dF$$



$$M_f = - \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_{\max} \frac{2y^2}{a} dy dz$$
$$= - \frac{b \sigma_{\max} a^2}{6}$$

Ce moment est compté **négalif** d'après le **sens conventionnel** de la figure.



$$|M_f| = \sigma_{\max} \frac{I_{Gz}}{(a/2)}$$

avec

$$I_{Gz} = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy dz = \frac{ba^3}{12}$$

I_{Gz} est le **moment quadratique** de la section transversale par rapport à son axe de rotation **Gz**.

2) Moment de résistance

Le **moment de résistance** de la section transversale est donné par :



$$W_{Gz} = \frac{I_{Gz}}{(a/2)} = \frac{I_{Gz}}{y_{\max i}}$$

D'où :

$$|M_f| = \sigma_{\max} W_{Gz}$$

3) Moment admissible

Les moments de flexion **admissibles** dans le domaine de l'**élasticité linéaire** sont donnés par l'**inégalité** suivante :



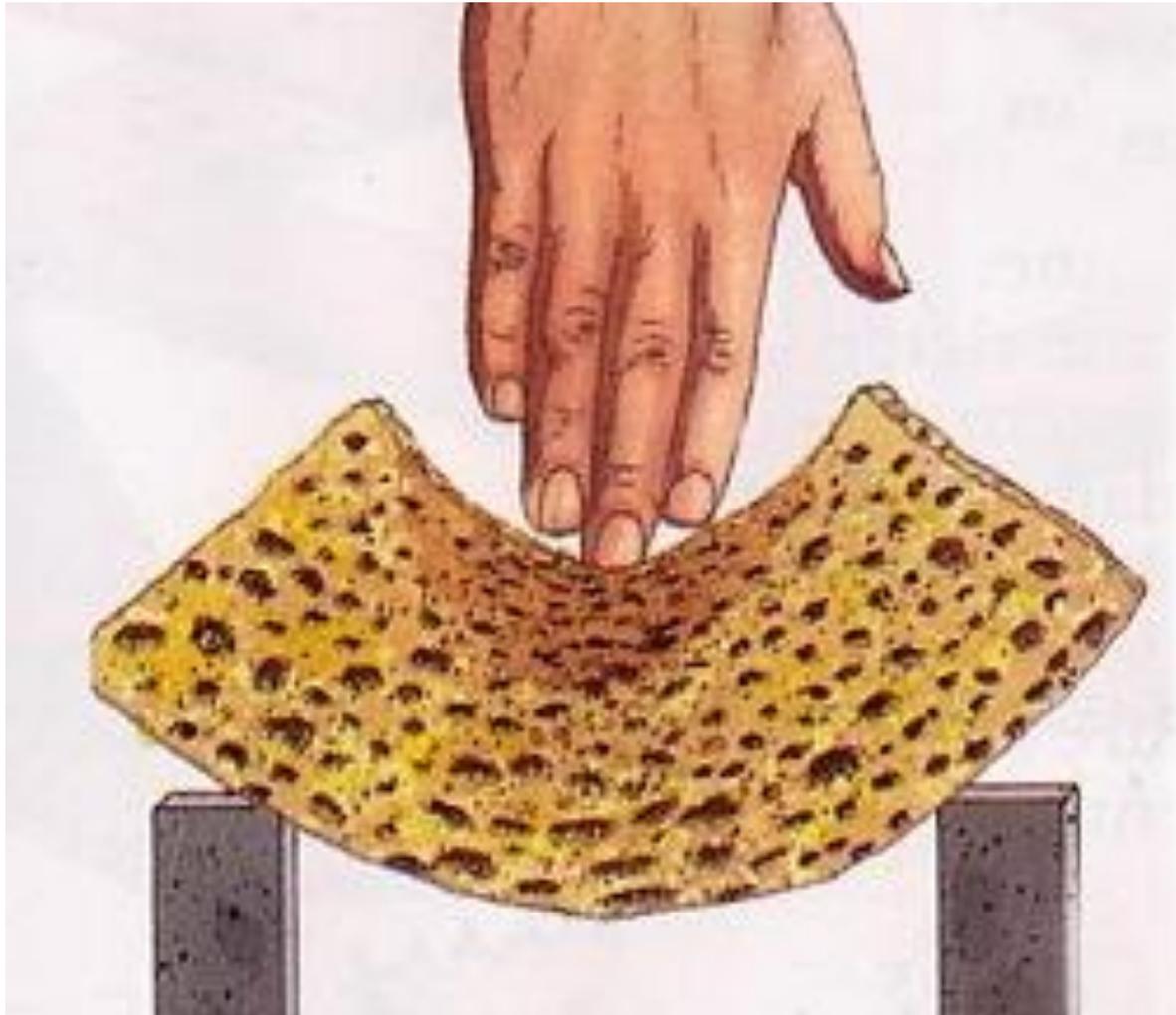
$$|M_f| \leq \sigma_{\text{limite}} W_{Gz} = M_{\text{limite}}$$

4) Remarques

Dans le cas de la déformation de **flexion pure**, le moment de flexion est proportionnelle à la contrainte normale maximale.

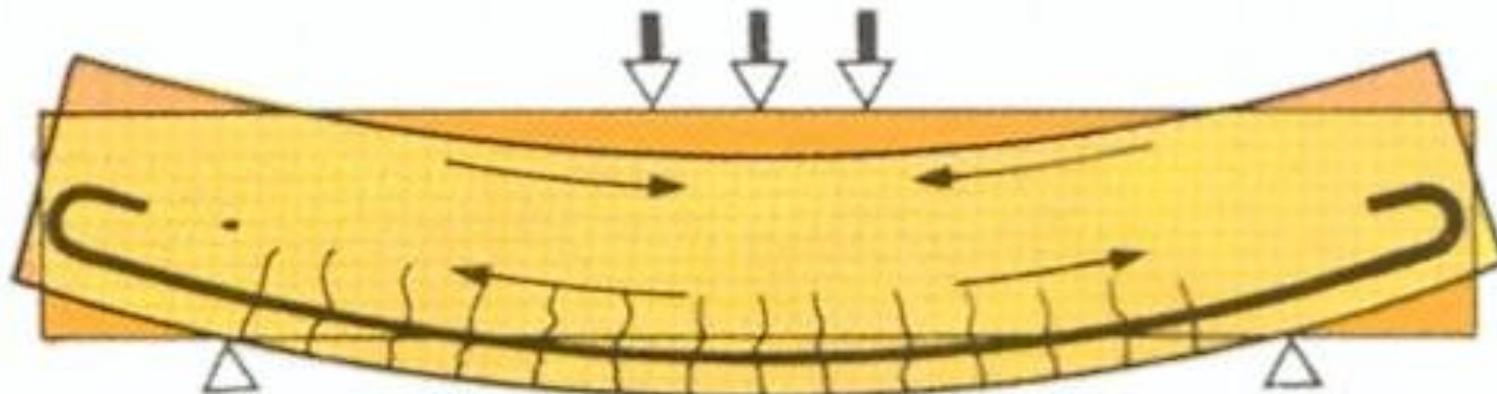
Dans le cas de l'exemple étudié, le **moment de flexion** est le même dans toutes les **sections transversales** de la barre (ou poutre).

Le moment de flexion est le même
dans toutes les sections transversales
de la barre (ou poutre), puisque **son**
poids est négligé et que la barre n'est
sollicitée qu'en ses extrémités par un
couple. Dans ce cas on dit qu'il s'agit
d'une **flexion pure**.



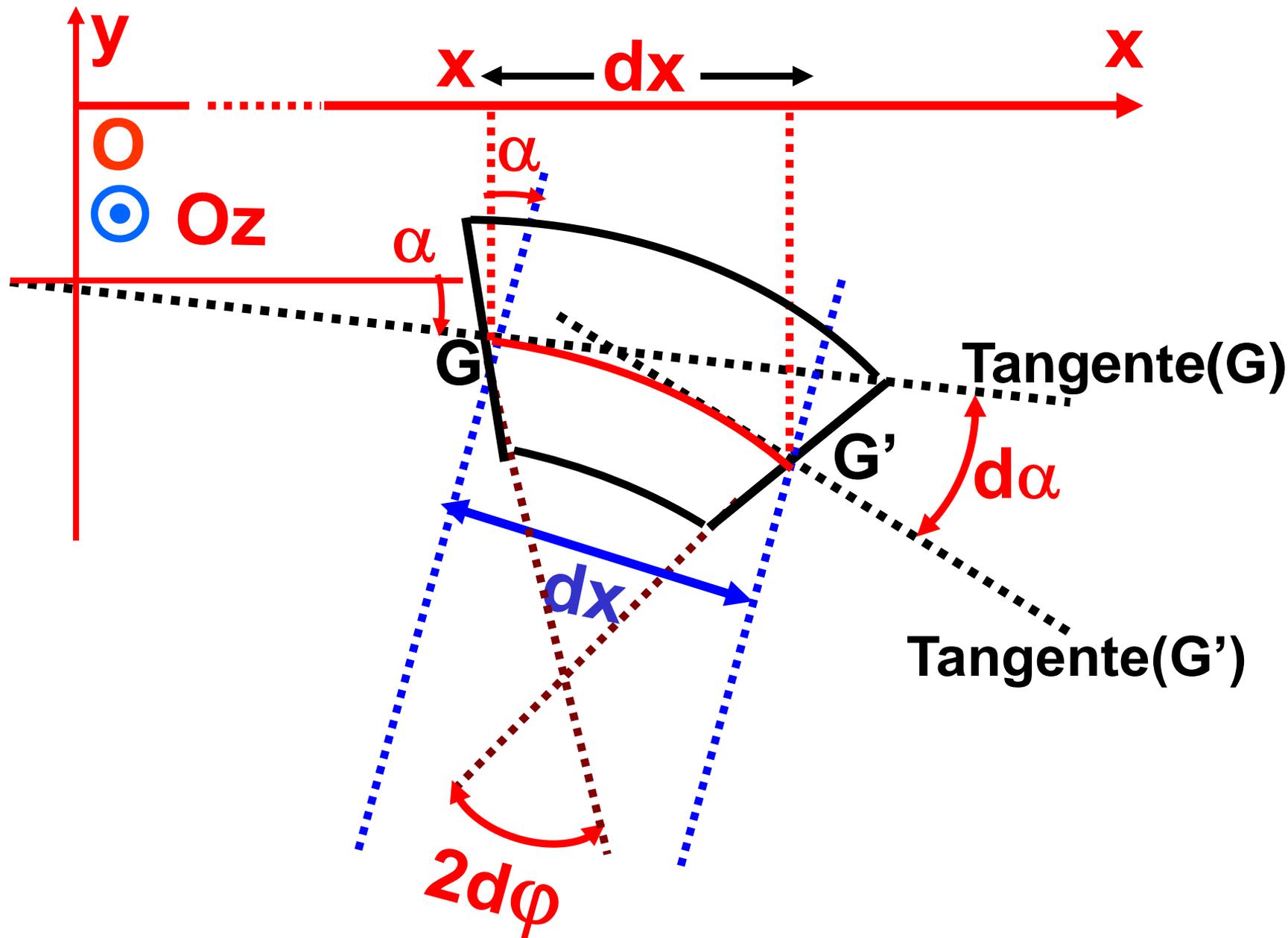
Principe de la **flexion simple** d'une poutre

Si la barre (ou la poutre), supporte des **charges localisées** ou des **charge réparties** ou que son **poids** n'est plus négligé, alors chaque section transversale **droite** subit à la fois un **moment fléchissant M_f** et un **effort tranchant** noté **T**. On dit qu'il s'agit d'une **flexion simple**.



Fonctionnement du béton armé en flexion

VI Equation de la déformée



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \alpha$$



$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

en plus

$$d\alpha = 2d\varphi$$

Loi de Hooke appliquée à la **couche supérieure**, donne :

$$\sigma_{\max} = E \frac{\frac{a}{2} 2 d\varphi}{dx} = E \frac{\frac{a}{2} d\alpha}{dx} = E \frac{a}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

sachant que :

$$M_f = -\sigma_{\max} \frac{I_{Gz}}{(a/2)}$$

nous obtenons :

$$M_f = -EI_{zz} \frac{d^2 z}{dy^2}$$

L'équation différentielle de la déformée est :



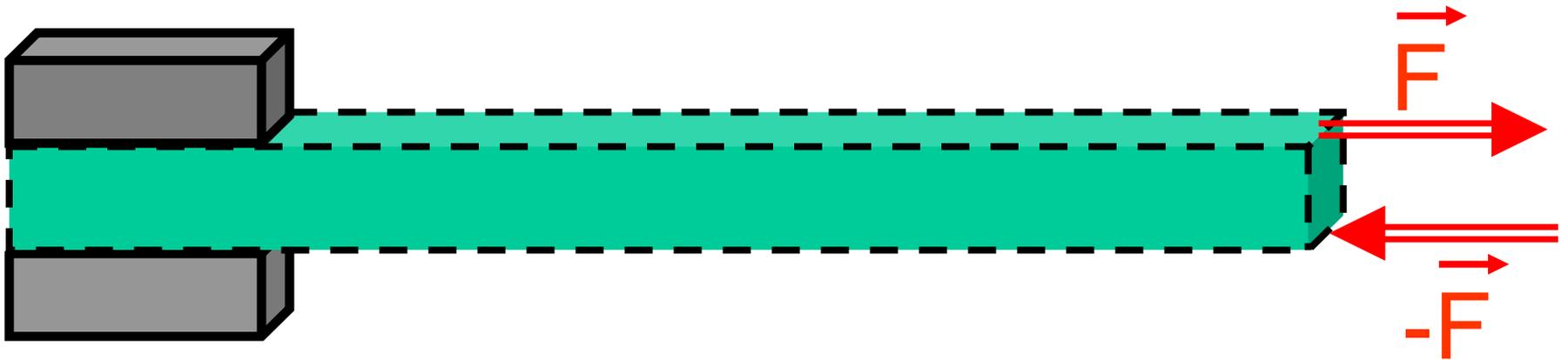
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M_f}{EI_{zz}}$$

L'expression du rayon de courbure de la déformée est donné par :



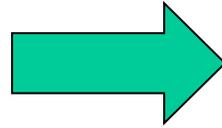
$$\frac{1}{\rho} = \frac{|M_f|}{EI_{zz}}$$

VII Calcul de la flèche



Admettons que l'extrémité ($x = 0$) est **encastrée** et que la **section** est **constante**.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_f}{EI_{Gz}}$$



$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_y = -\frac{|M_{\text{ext}}|}{EI_{Gz}} x$$

d'où :

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{|M_{\text{ext}}|}{EI_{Gz}} x^2$$

La flèche 'maximale' correspond dans ce cas la position $x = L$, soit :

$$y_{\text{max}} = \frac{1}{2} \frac{|M_{\text{ext}}|}{EI_{Gz}} L^2$$

VIII Charges

1) Charges concentrées

Les **charges** sont **appliquées** en **des points précis**. En dehors de ces points les charges sont nulles.

2) Charges réparties

Les **charges** sont **distribuées** sur une certaine longueur de façon uniforme ou non.

3) Intensité de charges

L'intensité de charge notée **q** (force par unité de longueur), est donnée par l'équation différentielle :



$$q = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{dF}{dx}$$

4) Remarque

Il est utile, lorsque nous utilisons les équations d'équilibre, de **remplacer** la **charge répartie par sa résultante** qui lui est par définition statiquement équivalente.

$$R = \int_0^L dF = \int_0^L q dx$$

$$R \bar{x} = \int_0^L x dF = \int_0^L q x dx$$

L est la longueur de la poutre.

\bar{x} est le point d'application de la résultante équivalente.

La position \bar{x} est donnée par :



$$\bar{x} = \frac{\int_0^L qx dx}{\int_0^L q dx}$$

\bar{y}

IX Relations différentielles d'équilibre

1) Effort tranchant T



$$\frac{dT}{dx} = -q$$

En intégrant entre deux sections de la poutre définies par les coordonnées x_1 et x_2 , pour lesquelles les efforts tranchants sont respectivement égaux à T_1 et T_2 , nous avons :

$$T_2 - T_1 = - \int_{x_1}^{x_2} q dx$$

2) Moment fléchissant M_f



$$\frac{dM_f}{dx} = -T$$

En intégrant entre deux sections de la poutre définies par les coordonnées x_1 et x_2 , pour lesquelles les moments fléchissant sont respectivement égaux à M_{f_1} et M_{f_2} , nous avons :

$$M_{f_2} - M_{f_1} = - \int_{x_1}^{x_2} T dx$$

3) Remarques

L'effort tranchant T est égal à la **somme algébrique des forces** extérieures située **d'un même côté de la section** (par convention à gauche).

Le moment de flexion M_f est égal à la **somme algébrique des moments** de toutes les forces extérieures située **d'un même côté de la section** (par convention à gauche).

A la **section** précise où $T = 0$, le **moment fléchissant** atteint une valeur **maximale ou minimale**.

X Etat des contraintes

1) Contrainte normale σ

a - Expression de σ

$$\sigma = \sigma_{\max} \frac{2y}{a}$$

et

$$\sigma_{\max} = M_f \frac{a}{2I_{Gz}}$$

par conséquent :

$$\sigma = y \frac{M_f}{I_{Gz}}$$

b - Contrainte normale maximum

La contrainte σ est maximum dans la section pour laquelle M_f est maximum. En plus dans cette section, la contrainte maximale est obtenue lorsque la variable y est maximale.



$$\sigma_{\text{maxi}} = y_{\text{maxi}} \frac{M_{f \text{ maxi}}}{I_{Gz}} = \frac{M_{f \text{ maxi}}}{W_{Gz}}$$

c – Condition de résistance

La **condition de résistance** à l'extension du matériau constituant la poutre est :



$$\sigma_{\text{maxi}} \leq \frac{\sigma_{\text{limite}}}{\alpha}$$

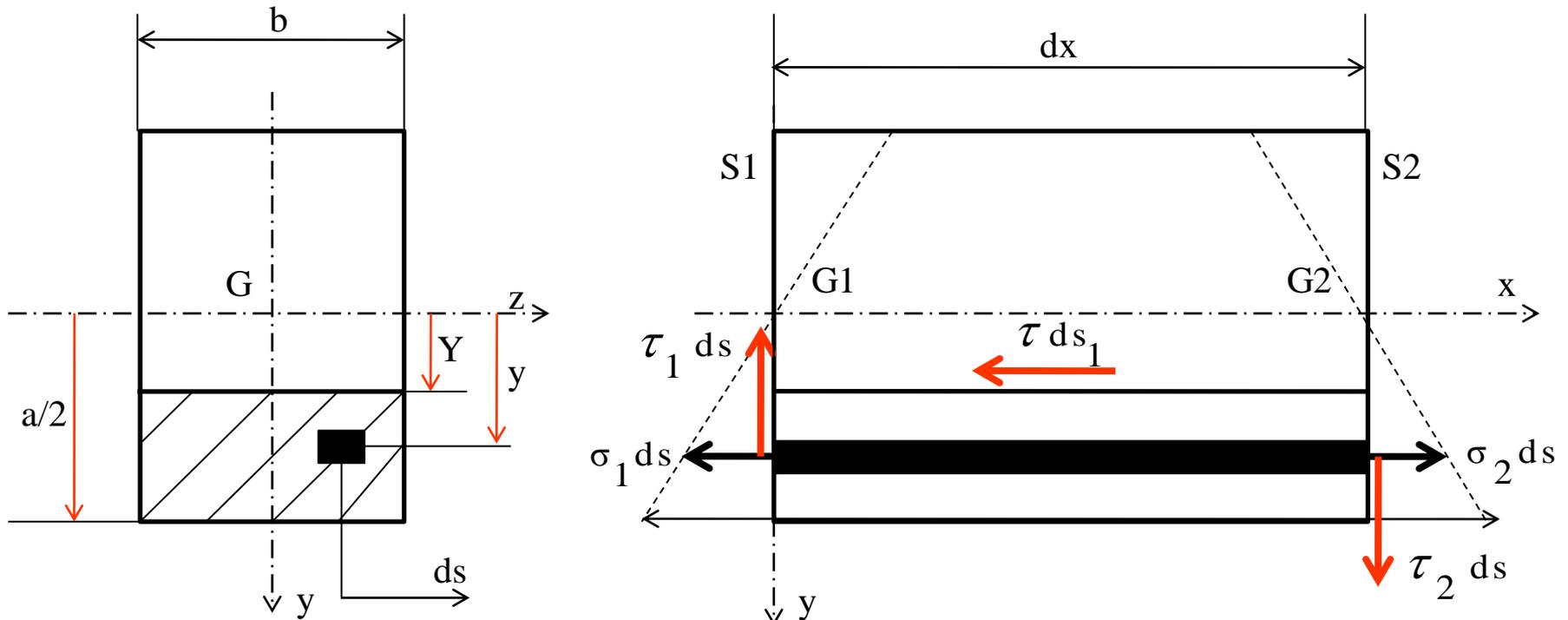
2) Contrainte de glissement τ

a - Présentation

La **flexion simple** introduit des **contraintes de cisaillement longitudinale** **égaux** aux **contraintes de cisaillement transversales** d'après la règle de réciprocité des contraintes.

b – Expression de τ

Isolons la **portion de poutre** située au-dessous du plan d'ordonnée Y et soit une **fibre tendue** de section ds et d'ordonnée y .



Le **tronçon isolé** est en équilibre donc le **torseur** associé au système de **forces extérieures** se réduit en G_1 à :

$$[\mathbf{T}]_{G_1} = \begin{cases} \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_{\vec{F}_{\text{ext}}/G_1} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \quad \text{entraîne :}$$

$$\int \vec{\sigma}_1 ds + \int \vec{\sigma}_2 ds + \int \vec{\tau}_1 ds + \int \vec{\tau}_2 ds + \int \vec{\tau} ds_1 = \vec{0}$$

soit en projection sur l'axe Gx :

$$-\int \sigma_1 ds + \int \sigma_2 ds + \int \tau ds_1 = 0$$

sachant que :

$$\sum \tau ds_1 = \tau b dx, \quad \sigma_1 = y \frac{M_{f1}}{I_{Gz}} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = y \frac{M_{f2}}{I_{Gz}}$$

nous avons :

$$\tau b dx = (M_{f2} - M_{f1}) \frac{\int_{-a/2}^{a/2} y ds}{I_{Gz}}$$

$$\tau b dx = dM_f \frac{\int_{-a/2}^{a/2} y ds}{I_{Gz}}$$

d'où :

$$\tau b dx = dM_f \frac{\int_{-a/2}^{a/2} y ds}{I_{Gz}}$$

et :

$$\tau b = \frac{dM_f}{dx} \frac{\int_{-a/2}^{a/2} y ds}{I_{Gz}}$$

Par définition, $W = \int y ds$ est le **moment statique** de la portion de section (S) d'ordonnée comprise entre Y et a/2. Elle est positif et son unité est le mm³.

$$\frac{dM_f}{dx} = -T \text{ et } W = \int_Y^{a/2} y ds$$

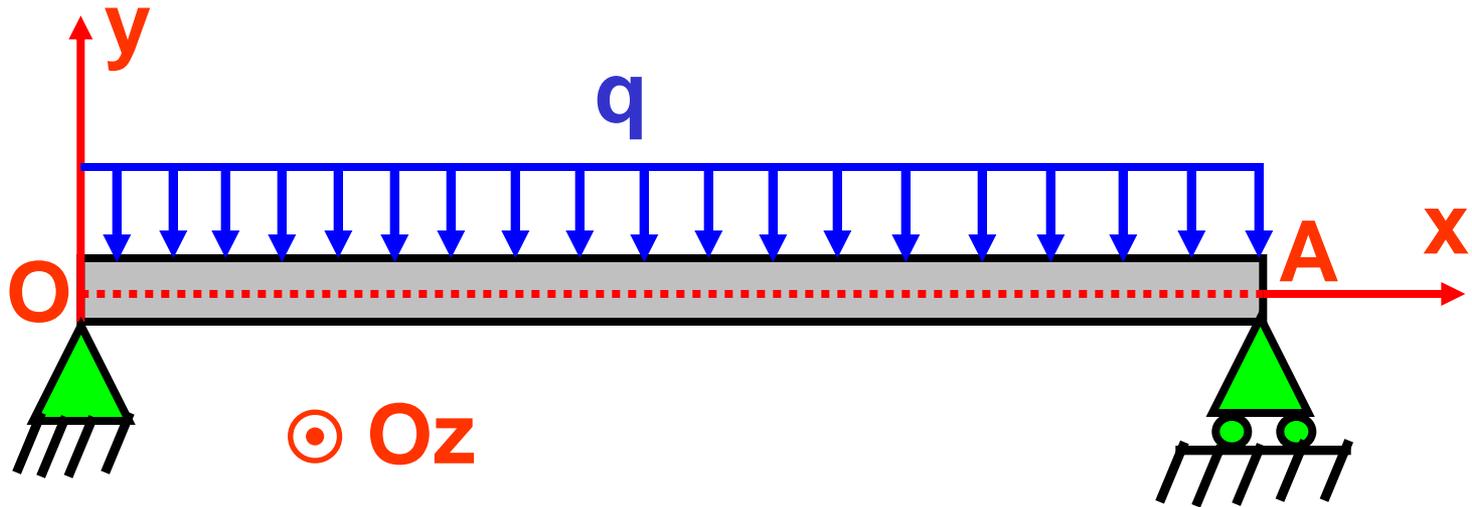
finalement :

$$\tau = - \frac{TW}{b I_{Gz}}$$

Exercice 1

Une poutre de longueur L , posée sur deux appuis O et A supporte une charge uniformément répartie q .

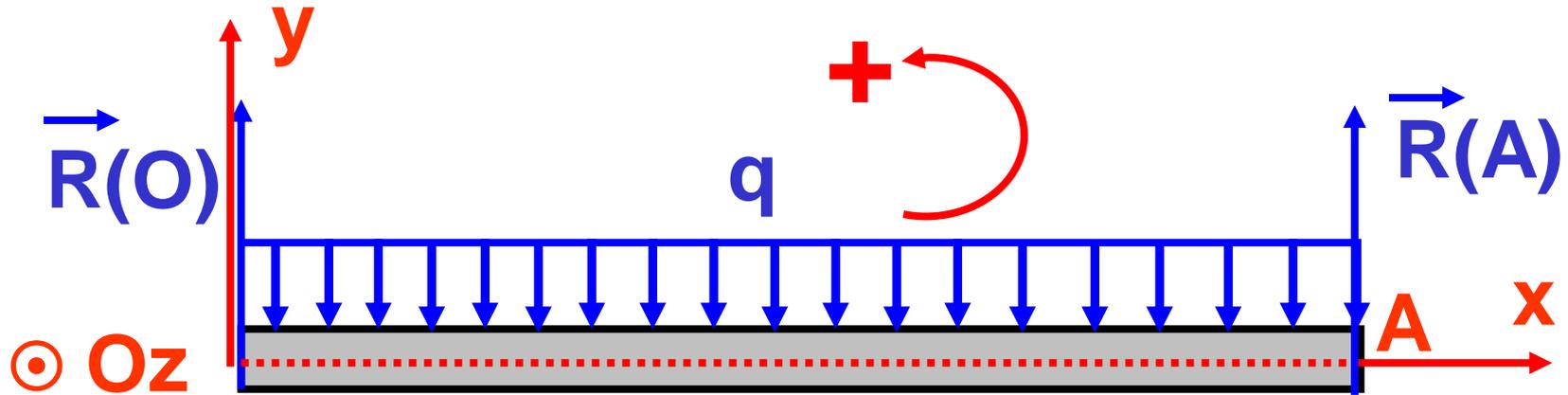
- 1) Déterminer les réactions aux appuis O et A . Donner les expressions de l'effort tranchant et du moment fléchissant le long de la poutre. Retrouver les équations différentielles d'équilibre.
- 2) Tracer les diagrammes $T(x)$ et $M_f(x)$.
- 3) Application numérique : $q = 40 \text{ daNm}^{-1}$ et $L = 4\text{m}$.



q est une force par unité de longueur ($q = \text{constante}$).

La poutre repose sur un **appui fixe** au point $x = 0$ et sur un **appui mobile** au point $x = L$.

Etudions l'équilibre global de la poutre.



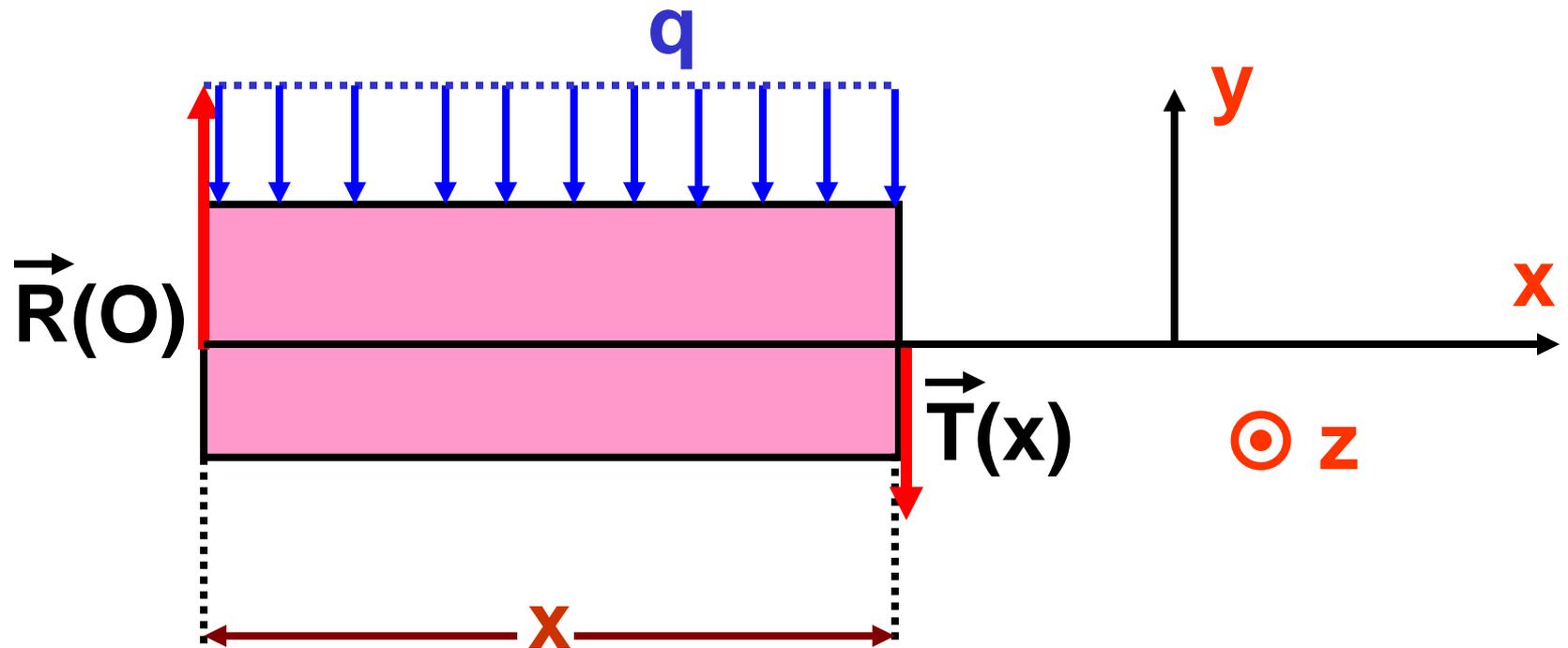
$$\left\{ \begin{array}{l} R(O) + R(A) - \int_0^L q \cdot dx = 0 \\ L \cdot R(A) - \int_0^L xq dx = 0 \end{array} \right.$$

1) Calcul des réactions, T(x) et M_f(x)



$$R(O) = R(A) = \frac{qL}{2}$$

Etudions maintenant l'équilibre d'un tronçon de poutre de longueur x .



Calcul de l'effort tranchant T(x)

$$T(x) = R(O) - qx$$



$$T(x) = -qx + \frac{qL}{2}$$

Calcul du moment fléchissant $M_f(x)$

$$M_f(x) = -xR(O) + \frac{x}{2}qx$$



$$M_f(x) = \frac{q}{2}x^2 - \frac{qL}{2}x$$

Les **équations d'équilibres** vérifiées par les **efforts** intérieurs appliquée sur une **section droite** sont :



$$\begin{cases} \frac{dT}{dx} = -q \\ \frac{dM_f(x)}{dx} = -T \end{cases}$$

Remarque: Ces équations sont indépendantes des conditions aux limites (conditions d'appuis).

2) Diagrammes

Diagramme de l'effort tranchant

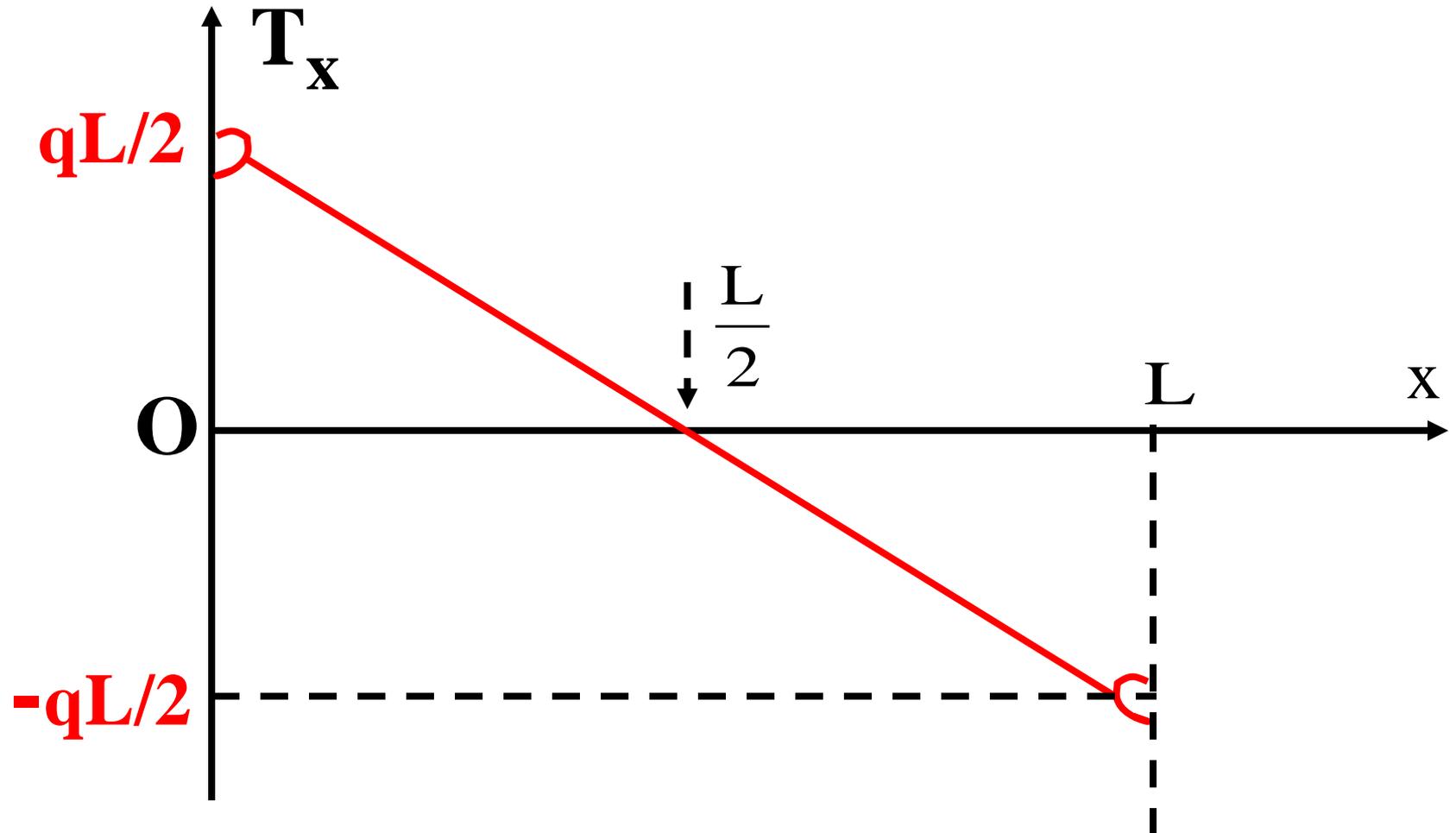
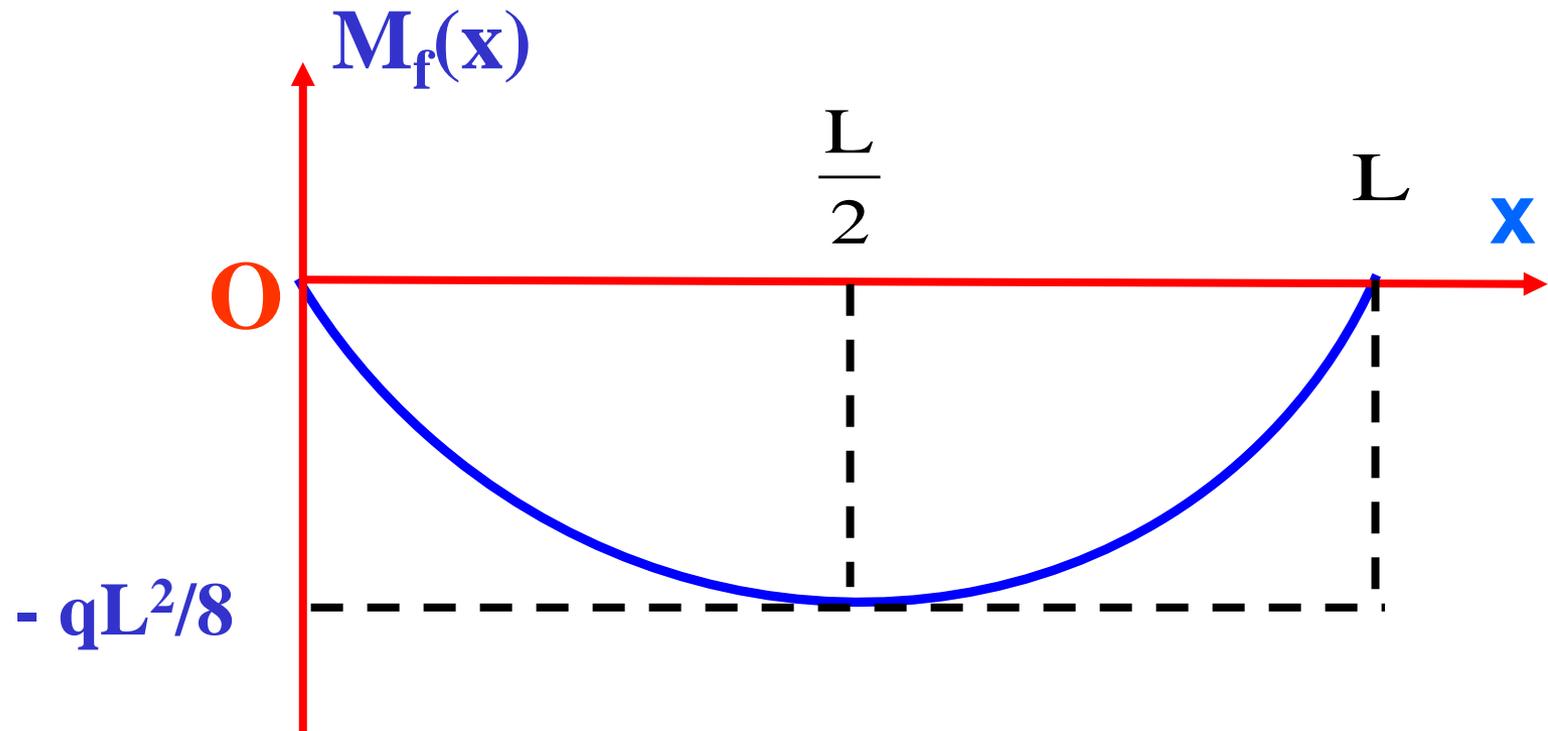


Diagramme du moment fléchissant

$$|M_{f \text{ maxi}}| = qL^2/8$$



Remarques :

✓ La section correspondant à la **valeur maximale du moment de flexion** est appelée **section dangereuse**.

✓ L'effort tranchant **T** subit une **discontinuité** au niveau des appuis (lieu des **forces concentrées**).

3) Application numérique

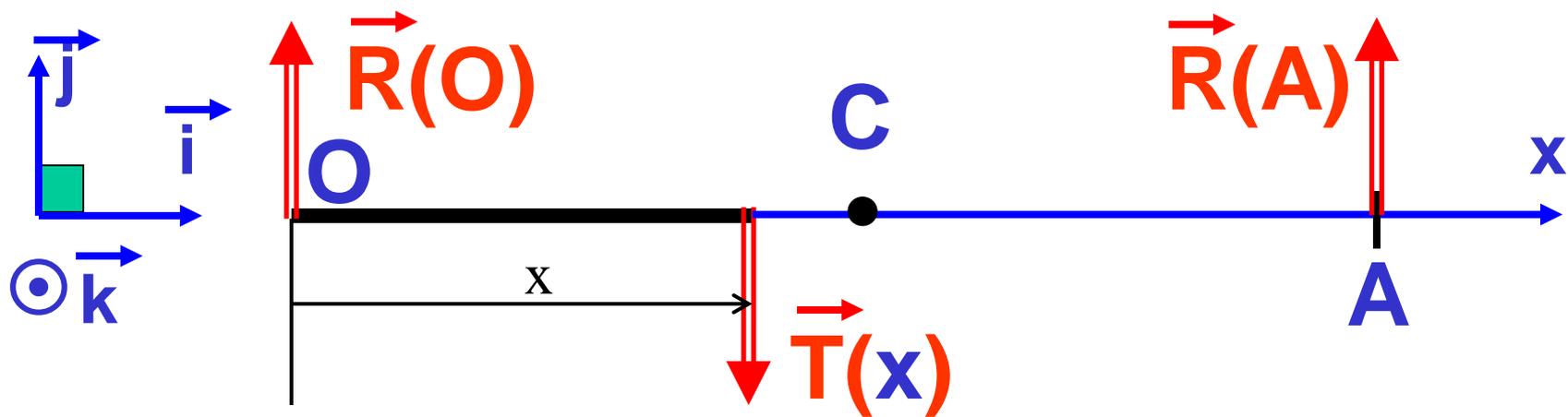
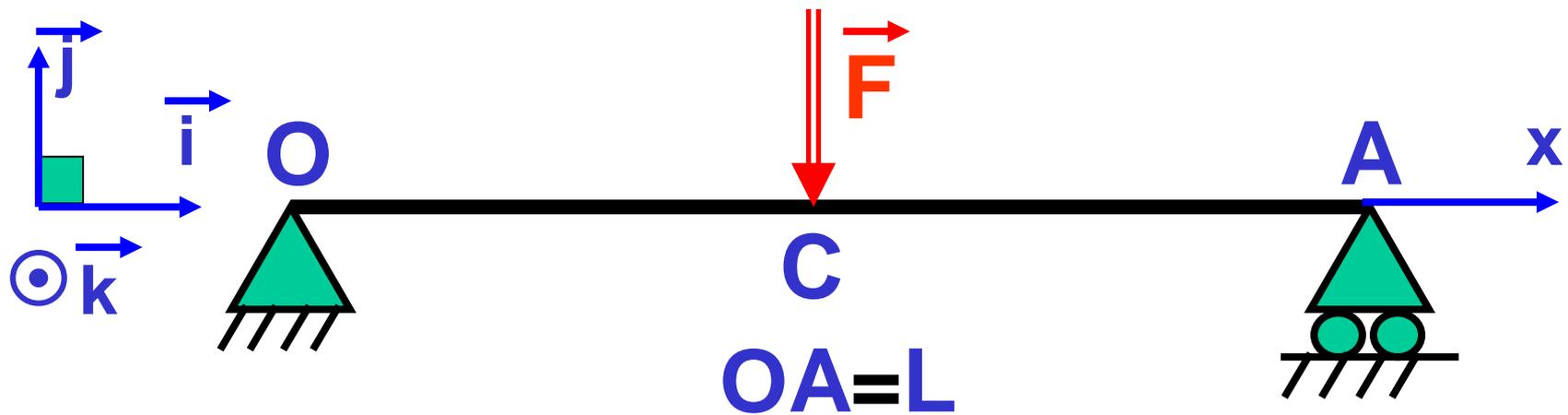
$$q = 40 \text{ daNm}^{-1} ; L = 4 \text{ m}$$

$R(O) = R(A)$	800 en N
$T(x)$	- 400(x-2) en N
T_{maxi}	800 N
$M_f(x)$	200 x(x-4) en Nm
$M_{f\text{maxi}}$	800 Nm

Exercice 2

Une poutre de longueur L , posée sur deux appuis O et A supporte une charge localisée en son centre C .

- 1) Déterminer les réactions aux appuis O et A . Donner les expressions de l'effort tranchant et du moment fléchissant le long de la poutre.
- 2) Tracer les diagrammes $T(x)$ et $M_f(x)$.
- 3) Déterminer l'expression de la flèche maximale f_c .

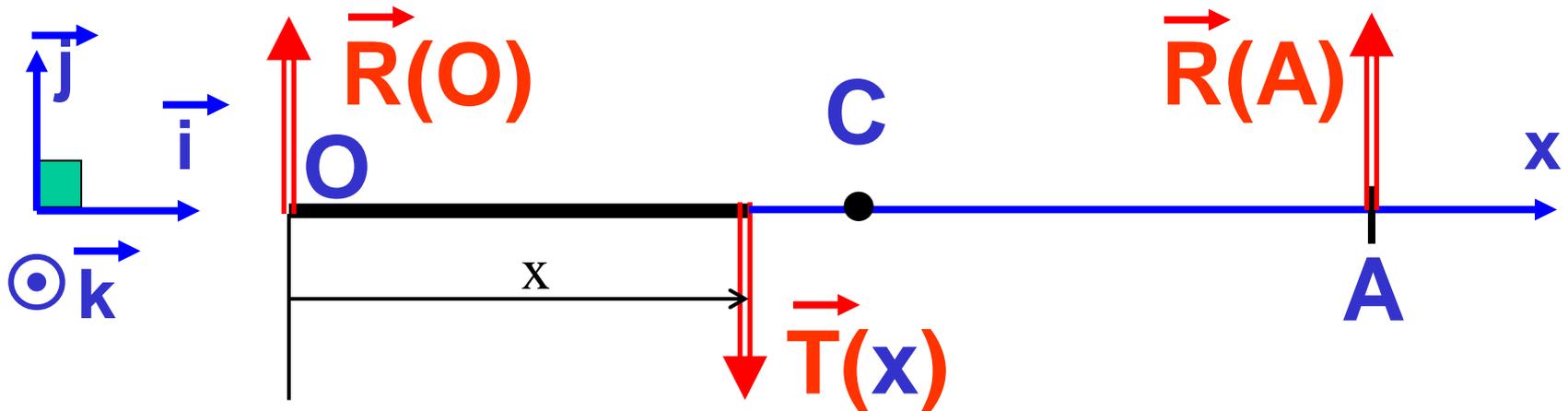


1) Calcul des réactions, $T(x)$ et $M_f(x)$

En tenant compte de la symétrie, on peut écrire :



$$R(O) = R(A) = \frac{F}{2}$$



Calcul de l'effort tranchant $T(x)$

Soit M un point d'abscisse x :

Zone OC ($0 < x < L/2$)

$$T(x) = R(O)$$

$$T(x) = \frac{F}{2}$$

Zone OC ($0 < x < L/2$)

$$T(x) = R(O) - F$$

$$T(x) = -\frac{F}{2}$$

Calcul du moment fléchissant $M_f(x)$

Soit M un point d'abscisse x :

Zone OC ($0 < x < L/2$)

$$M_f(x) = -xR(O)$$

$$M_f(x) = -\frac{F}{2}x$$

Zone OC ($0 < x < L/2$)

$$M_f(x) = -x\frac{F}{2} + \left(x - \frac{L}{2}\right)F$$

$$M_f(x) = \frac{F}{2}x - \frac{FL}{2}$$

2) Diagrammes

Diagramme de l'effort tranchant

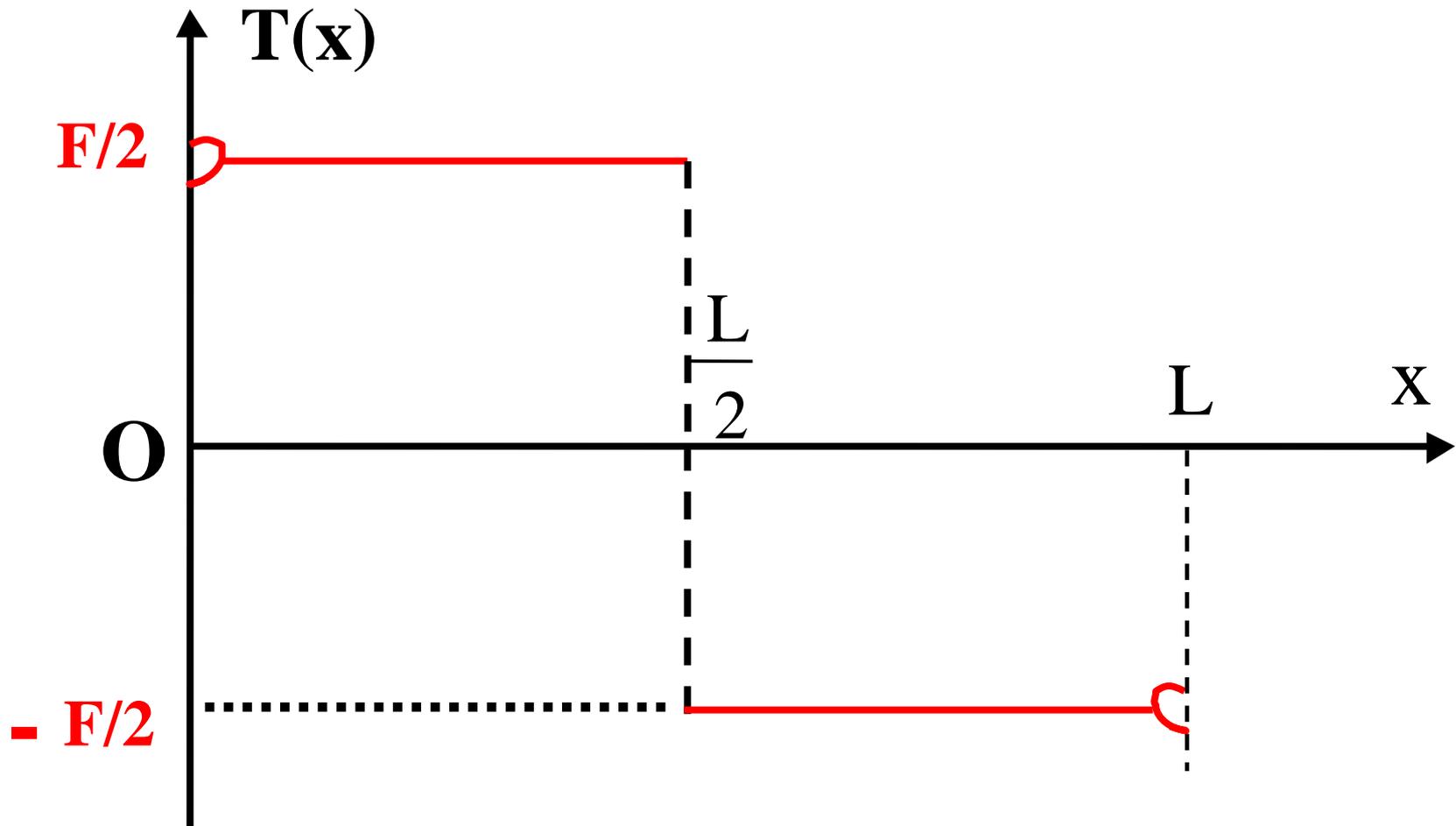
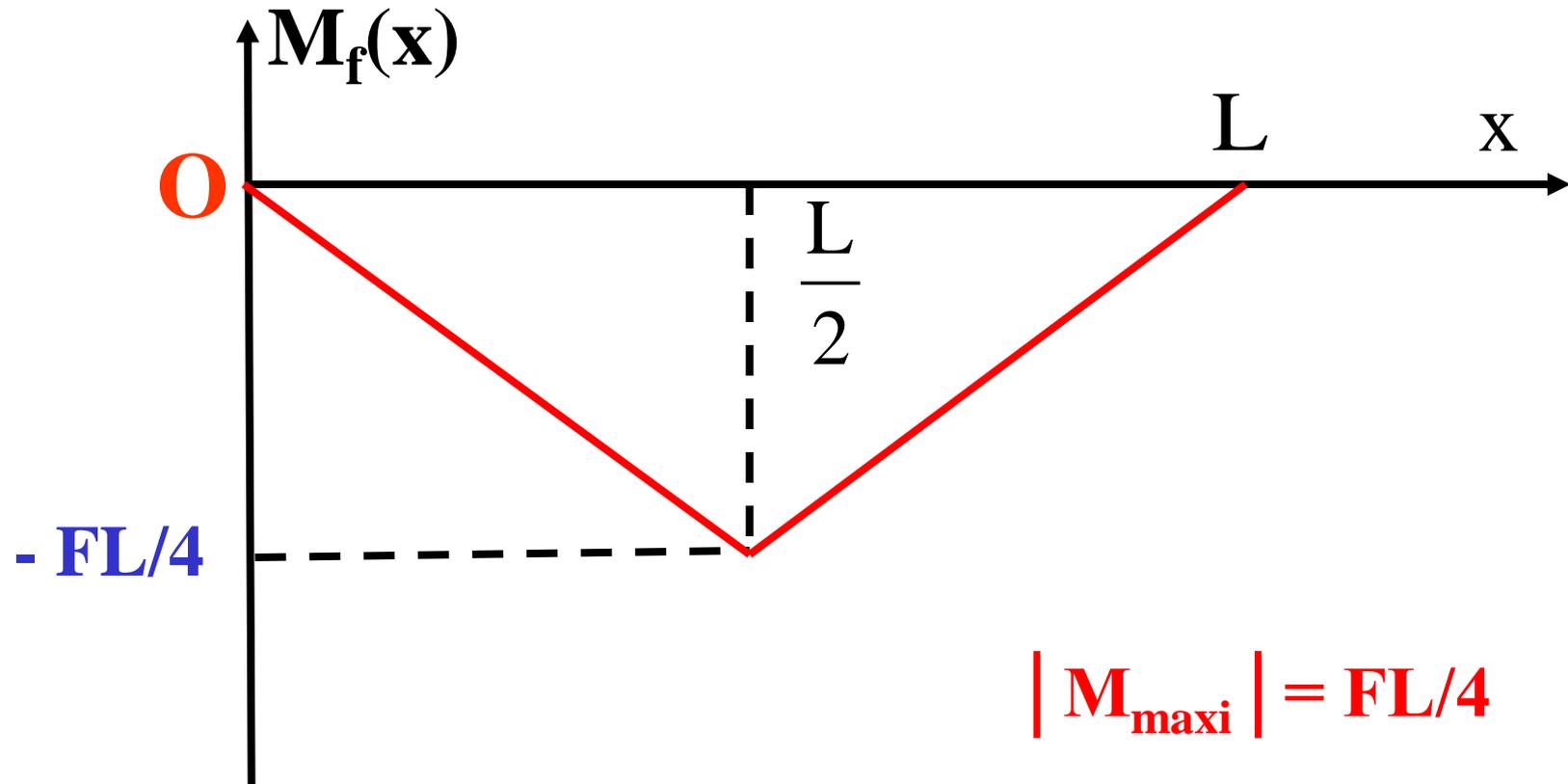


Diagramme du moment fléchissant



3) Calcul de la flèche maximale

On sait qu'on a un point M d'abscisse x situé dans la zone OC, le moment de flexion est donné par :

$$M_f(x) = -\frac{F}{2}x$$

L'équation différentielle de la déformée entre O et C est la suivante :

$$EI_{Gz} \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_f$$

ou

$$EI_{Gz} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{F}{2}x$$

L'équation différentielle devient :

$$\frac{2EI_{Gz}}{F} \frac{d^2 y}{dx^2} = x$$

Intégrons une première fois :

$$\frac{2EI_{Gz}}{F} \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

En C milieu de la déformé, celle-ci possède une tangente horizontale

$$x = L/2 ; y' = 0$$

entraîne :

$$C_1 = -\frac{L^2}{2}$$

donc :

$$\frac{2EI_{Gz}}{F} \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{2}$$

Intégrons une deuxième fois :

$$\frac{2EI_{Gz}}{F} y = \frac{x^3}{6} - \frac{L^2}{2} x + C_2$$

**On peut calculer C_2 car en O ($x=0$; $y=0$),
ce qui entraine $C_2 = 0$.**

$$y = \frac{F}{2EI_{Gz}} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{L^2}{2} x \right)$$

La flèche en C est donné pour $x = L/2$.

$$f_c = -\frac{FL^3}{48EI_{Gz}}$$

f_c en mm; F en N; L en mm;
E en Nmm² I en mm².